ΩΡΙΑΙΑ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ

ΔΕΝ ΟΝΕΙΡΕΥΟΜΑΣΤΕ ΚΑΤΙ ΓΙΑ ΝΑ ΓΙΝΕΙ ΟΝΕΙΡΕΥΟΜΑΣΤΕ ΓΙΑ ΝΑ ΚΟΙΤΑΜΕ ΨΗΛΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1.) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο R με α,β∈R τέτοια ώστε f(α)f(β)<0, τότε υπάρχει $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$: $f(x_0)=0$. Αλήθεια ή Ψέματα; **1Μ**

Α2.) Πότε μια πραγματική συνάρτηση λέγεται συνεχής στο (α,β] στο οποίο είναι ορισμένη; **1Μ**

Α3.) <<Αν μια πραγματική συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο $\chi_0 \in D_f$,τότε και η $|f|$ παρουσιάζει ασυνέχεια στο χ_0 >>. **1Μ**

α.) Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση γράφοντας δίπλα στο γράμμα της τη λέξη Αληθής αν είναι σωστή και τη λέξη Ψευδής αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

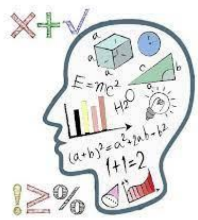
β.) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Α4.) Αν f μία πραγματική συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο $\Re$, να εξετάσετε βασισμένοι στο σχολικό εγχειρίδιο αν μπορεί η f να έχει σύνολο τιμών το $R_f=f(D_f)=R^*$. **1Μ**

Α5.) Εστω η συνεχής στο σύνολο Α=D_fσυνάρτηση f τότε η γραφική της παράσταση C_f είναι πάντα μια συνεχής γραμμή. Αλήθεια ή Ψέματα; **1Μ**

ΘΕΜΑ Β

Β1.) Να αποδείξετε με τη χρήση του θεωρήματος Bolzano πως κάθε πολυώνυμο P με degP(x)=2n+1,n∈ $\aleph$ μηδενίζεται τουλάχιστον μια φορά στο $\Re$. **4Μ**



Β2.) Δίνεται η συνάρτηση f:(α,β)→R, με αβ<0, για την οποία ισχύει $f^2(x)+6f(x)+9\sigma\upsilon\nu^2(x^4) \le 0$,για κάθε x∈$D_f$

Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ **4Μ**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & -2<x<-1 \\ \dfrac{\eta\mu\pi\chi}{6\sqrt[4]{(\chi+9)^2}-18}, & -1\le\chi<0 \\ \pi, & \chi=0 \\ \dfrac{\chi\sqrt{\alpha^2}\,\eta\mu\frac{x}{2}}{\sqrt{\chi^2+1}-1}, & 0<\chi<1 \end{cases}$

,γνωρίζουμε οτι : , $\lim_{\chi\to-1^-}(f(x))=\lim_{x\to 1}(g(x)) +|\alpha-2\pi|$,όπου ισχύει $g^3(x)+g(x)=\ln x$, x>0

Να βρείτε τα α∈R^*,αν υπάρχουν, έτσι ώστε f συνεχής στο (-2,1)

λάβετε υπόψη σας πως η $f_1(x)$ είναι συνεχής στο (-2,-1) **7Μ**

καλή επιτυχία!!

Αγγελάκης Νικόλαος

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΩΡΙΑΙΑΣ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α: **Α1.)** Η πρόταση είναι ψευδής, διότι δεν γνωρίζουμε την διάταξη των α,β

Α2.) Μια πραγματική συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο (α,β] όταν είναι συνεχής σε καθε εσωτερικο σημειο του (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{\chi\to\beta^-}(f(x))=f(\beta)$

Α3.) α.) Ψευδής, **β.)** Με κατάρριψη καθολικότητας: Εστω η συνάρτηση

$f(x)=\begin{cases}-1, & x\le x_0\\ 1, & x>x_0\end{cases}$, η f δεν είναι συνεχής στο x_0 αλλά η |f| θα έχει τύπο |f|(x)=1 η οποία είναι συνεχής και στο x_0.

Α4.) Οχι η f αφου είναι συνεχής στο R το οποίο είναι διάστημα σύμφωνα με το σχολικό εγχειρίδιο και το σύνολο τιμών της θα είναι διάστημα άρα δεν θα μπορούσε να είναι το R* το οποίο αποτελεί ένωση διαστημάτων.

Α5.) Η πρόταση είναι ψευδής. Με κατάρριψη καθολικότητας: Εστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού το R* η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως ρητή όμως η γραφική της παράσταση ως γνωστόν δεν είναι μια συνεχής γραμμή.

ΘΕΜΑ Β: **Β1.)** Έστω λοιπόν το πολυώνυμο $P(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+...+a_0$, $a_{2n+1}\neq 0$,η P συνεχής στο R ως πολυωνυμική. Επιπλέον:a_{2n+1}

- Αν $a_{2n+1}>0$, $\lim\limits_{\chi\to-\infty}(P(x))=-\infty$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}(P(x))=+\infty$, επομένως θα υπάρχουν κ<0 και λ>0 τέτοια ώστε P(κ)<0 και P(λ)>0 άρα P(κ)P(λ)<0
- Αν $a_{2n+1}>0$, $\lim\limits_{\chi\to-\infty}(P(x))=+\infty$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}(P(x))=-\infty$, επομένως θα υπάρχουν κ<0 και λ>0 τέτοια ώστε P(κ)>0 και P(λ)<0 άρα P(κ)P(λ)<0

ΣΕ ΚΑΘΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ, τηρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano και προκύπτει πως υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα $\chi_0\in(\kappa,\lambda)\subseteq R$ **:**$P(\chi_0)=0$. Τελικά, κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού μηδενίζεται τουλάχιστον μία φορά στο R.

Β2.) $f^2(x)+6f(x)+9\sigma\upsilon\nu^2(x^4)\le 0\Leftrightarrow f^2(x)+6f(x)+9(1-\eta\mu^2(\chi^4))\le 0$

$\Leftrightarrow f^2(x)+6f(x)+9\le 9\eta\mu^2(\chi^4)\Leftrightarrow(f(x)+3)^2\le[3\eta\mu^2(\chi^4)]^2\Leftrightarrow|f(x)+3|\le|3\eta\mu^2(\chi^4)|$

$\Leftrightarrow-|3\eta\mu^2(\chi^4)|-3\le f(x)\le|3\eta\mu^2(\chi^4)|-3$ **(1)**

επίσης, $\lim\limits_{\chi\to0}(-|3\eta\mu^2(\chi^4)|-3)=\lim\limits_{\chi\to0}(|3\eta\mu^2(\chi^4)|-3)=-3$ **(2)**

Απο **(1)** και **(2)** και σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{\chi\to0}(f(x))=-3$ και με αντικατάσταση όπου χ το 0 στην αρχική μας σχέση προκύπτει:

$f^2(0)+6f(0)+9\sigma\upsilon\nu^2(0^4)\le 0\Leftrightarrow(f(0)+3)^2\le 0\Leftrightarrow f(0)+3=0\Leftrightarrow f(0)=-3=\lim\limits_{\chi\to0}(f(x))$

επομένως η f είναι συνεχής στο x_0=0.

ΘΕΜΑ Γ: Αρχικά η f είναι συνεχής στα διαστήματα (-2,-1) και (-1,0) και(0,1) ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων αρκεί λοιπόν να εξετάσω αν η f μπορεί να είναι συνεχής και στα επίμαχα σημεία ταυτόχρονα.
αξιοποιώντας το πρώτο δεδομένο θα προσπαθήσω να βρω το $\lim_{x\to 1}(g(x))$

• Απο την δοθείσα σχεση είναι: $g^3(x)+g(x)=\ln x \Leftrightarrow g(x)(g^2(x)+1)=\ln x \Leftrightarrow g(x)=\frac{\ln x}{g^2(x)+1}$

$\Rightarrow |g(x)|=\left|\frac{\ln x}{g^2(x)+1}\right| \leq |\ln x| \Leftrightarrow -|\ln x| \leq g(x) \leq |\ln x|$ **(1)** επίσης $\lim_{x\to 1}(-|\ln x|)=\lim_{x\to 1}(|\ln x|)=0$ **(2)**

Απο **(1)** και **(2)** και σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής και $\lim_{x\to 1}(g(x))=0$

επομένως $\lim_{\chi\to -1^-}(f(x))=|\alpha-2\pi|$

• για χ κοντα στο ο από αριστερά $f(x)=\frac{\eta\mu\pi\chi}{6\sqrt[4]{(\chi+9)^2}-18}=\frac{\eta\mu\pi\chi}{6(\sqrt{(\chi+9}-3)}=\frac{\eta\mu\pi\chi(\sqrt{(\chi+9}+3)}{6\chi}=$

$\frac{\eta\mu\pi\chi(\sqrt{(\chi+9}+3)\pi}{6\chi\pi}$,
οπότε $\lim_{\chi\to 0^-}(f(x))=\pi=f(0)$.

•Για να είναι η f συνεχής στο -1 αρκεί
$\lim_{\chi\to -1^-}(f(x))=\lim_{\chi\to -1^+}(f(x))=f(-1)\Leftrightarrow|\alpha-2\pi|=0$ **(3)**

• Για χ κοντά στο 0 απο δεξια $f(x)=\frac{\chi\sqrt{\alpha^2}\,\eta\mu\frac{x}{2}}{\sqrt{\chi^2+1}-1}=\frac{\chi|a|\eta\mu\frac{x}{2}(\sqrt{\chi^2+1}+1)}{\chi^2}=\frac{|a|\eta\mu\frac{x}{2}(\sqrt{\chi^2+1}+1)}{2\frac{x}{2}}$

εύκολα $\lim_{\chi\to 0^+}(f(x))=|a|$

• •Για να είναι η f συνεχής στο 0 αρκεί
$\lim_{\chi\to 0^-}(f(x))=\lim_{\chi\to 0^+}(f(x))=f(0)\Leftrightarrow|\alpha|=\pi$ **(4)**

ΤΕΛΙΚΑ για να είναι η f συνεχής στο (-2,1) θα πρέπει να είναι ταυτόχρονα συνεχής και στα σημεία χ_1=-1 και χ_2=0 , αρκεί δηλαδή να βρω τις λύσεις του συστήματος των **(3)** και **(4)** το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως δεν υπάρχουν α∈R* τέτοια ώστε f συνεχής στο (-2,1)

Αγγελάκης Νικόλαος